SOLUCIONES

1.- Se dice que una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a "a" $\in \mathbb{R}$ (o tiene límite "a") si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo número natural $n \geq n_0$ se verifica que $|a_n - a| < \varepsilon$.

En este caso se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Utilizando los cuantificadores se puede escribir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \Big|\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

2.-

$$|\operatorname{arc\,tg} x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arc\,tg}(n^3) \text{ es un valor acotado}$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arc\,tg}(n^3) \cdot \frac{1}{n^3} = (\text{valor acotado}) \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+2} + \cdots + \frac{n}{3n^2+n} \right) = \frac{1}{3} \text{ , porque}$$

El mayor de los n sumandos es $\dfrac{n}{3n^2+1}$

El menor de los n sumandos es $\dfrac{n}{3n^2+n}$, luego

$$\underbrace{n \cdot \frac{n}{3n^2+n}}_{\to \frac{1}{3}} \leq \underbrace{\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+2} + \cdots + \frac{n}{3n^2+n}}_{\downarrow\ \frac{1}{3}} \leq \underbrace{n \cdot \frac{n}{3n^2+1}}_{\to \frac{1}{3}}$$

La regla del sandwich nos proporciona el límite.

3.- Por ser $Ln\, x$ una función continua $\forall x>0$,
podemos asegurar que

$$\lim_{n\to\infty} Ln\left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right)^{(n+1)^2} = Ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right)^{(n+1)^2}\right]$$

El límite de la sucesión presenta una indeterminación del tipo 1^∞ y por ello usamos la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n(a_n-1)}$$ aplicable en este caso

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right)^{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} e^{(n+1)^2\left(\frac{4n^2}{4n^2-1}-1\right)} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}(n+1)^2\left(\frac{4n^2-(4n^2-1)}{4n^2-1}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2-1}} = e^{\frac{1}{4}}$$

luego $$\lim_{n\to\infty} Ln\left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right)^{(n+1)^2} = L_n\, e^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$ //

---

4. $a_1=10$ y $a_2=\sqrt{10+6}=4$, luego la sucesión parece ser decreciente

Demostraremos que la sucesión es monótona decreciente mediante el principio de inducción:

I.- Comprobamos que $a_2<a_1$, $4<10$

II.- Suponemos que $a_n<a_{n-1}$

III.- Demostramos, a partir de esa suposición que $a_{n+1}<a_n$

$a_n < a_{n-1} \Rightarrow \quad a_n + 6 < a_{n-1} + 6 \Rightarrow$

$\sqrt{a_n+6} < \sqrt{a_{n-1}+6}$, porque la función $\sqrt{x}$ es creciente, y esta desigualdad es $a_{n+1} < a_n$ ~~[illegible]~~ que se cumple $\forall n \in N$

Una sucesión de números reales monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente

Para demostrar que la sucesión está acotada inferiormente buscamos antes el límite de la sucesión.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n+6} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n + 6}$$

$$L = \sqrt{L+6}$$

$$L^2 = L + 6$$

$$L^2 - L - 6 = 0 \Rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm\sqrt{25}}{2} =$$

$$= \frac{1\pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Ambos valores pueden ser cota inferior de la sucesión, pero buscaremos la mayor de las cotas inferiores.

Demostraremos que 3 es cota inferior de la sucesión por el principio de inducción

I.- Comprobamos que $3 < a_1 = 10$

II.- Suponemos que $3 < a_{n-1}$

III.- Demostraremos, a partir de esta suposición, que $3 < a_n$

$$3 < a_{n-1} \Rightarrow \quad 3+6 < a_{n-1}+6 \Rightarrow$$

$\sqrt{9} < \sqrt{a_{n-1}+6}$ y esta desigualdad es $3 < a_n$, y por lo tanto se cumple que $3 < a_n$, $\forall n \in N$.

Luego la sucesión es monótona decreciente y está acotada inferiormente por el ~~número~~ 3, y por ello se puede afirmar que es convergente.

El cálculo del límite nos ha proporcionado dos valores posibles y el mayor de ellos el 3 es el límite de la sucesión.

NOTA.- Todos los términos de la sucesión son números positivos, luego -2 no es punto de acumulación de la sucesión y no puede ser su límite, aunque sí es una cota inferior.

---

5. Con el criterio del cociente o de D'Alembert estudiamos la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} \cdot n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2^{2(n+1)} \cdot (n+1)!}}{\dfrac{1}{2^{2n} \cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^{2n}} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{2^{2n}} \cdot 2^2 \cdot \cancel{n!}\,(n+1)} = 0 < 1$$

luego la serie converge.

Aplicaremos el criterio de la raíz o de Cauchy a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1} =$$

$= \frac{1}{e} < 1$ luego la serie converge.

---

6. Las dos series tienen términos positivos y negativos por lo que hay que estudiar su convergencia absoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}(n^3)}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(n^3)|}{|n^3|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(n^3)|}{n^3}$$

Esta sí es una serie de términos no negativos y podemos aplicarle el criterio de comparación para compararla con la serie de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

$$\frac{|\operatorname{sen}(n^3)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3} \quad \forall n \in N, \text{ luego la}$$

serie de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es mayorante de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(n^3)|}{n^3}$. Como la mayorante es convergente ($p > 1$ en la serie de Riemann) la serie de los valores absolutos es convergente y la serie dada es absolutamente convergente y por ello convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos(n^3)}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos(n^3)|}{|3^n|} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos(n^3)|}{3^n}$$

Aplicando el criterio de comparación, comparamos esta serie con la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$

$$\frac{|\cos(n^3)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n} \quad , \forall n \in N$$

La serie geométrica de razón $\frac{1}{3}$, es convergente y es mayorante de la serie de los valores absolutos. Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^3)}{3^n}$ es absolutamente convergente y por ello es convergente.

7. 1) Estudiamos la convergencia de la serie de los valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n(n+1)\,2^n} \right|$ mediante el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)\,2^{n+1}} \right|}{\left| \frac{x^n}{n(n+1)\,2^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x^n} \cdot x \cdot n\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{2^n}}{\cancel{(n+1)}(n+2)\,\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot \cancel{x^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+2} \cdot \frac{x}{2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+2} \right| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{2} \right| = 1 \cdot \left| \frac{x}{2} \right|$$

La serie es convergente cuando este límite es menor que 1

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow \frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow |x| < 2$$

La serie está centrada en 0 y su radio de convergencia es 2, $|x-0|<2$.

Para precisar el campo de convergencia hay que estudiar qué pasa en $x=2$ y en $x=-2$.

En $x=2$, la serie es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Aplicando el criterio de Pringsheim se tiene que

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ si $\alpha = 2 > 1$, luego la serie converge.

En $x=-2$ la serie es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{2^n}}{n(n+1)\cdot \cancel{2^n}}$.

La serie de los valores absolutos es la serie obtenida en $x=2$, luego como aquella es convergente, la serie en $x=-2$ es absolutamente convergente y el campo de convergencia es $[-2,2]$ o bien $-2 \le x \le 2$.

---

2) $\displaystyle F(x=2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{2^n}}{n(n+1)\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

esta es una serie telescópica.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}$$

Si $n=0$ $\quad 1 = A$

Si $n=-1$ $\quad 1 = -B \Rightarrow B = -1$

Luego el término enésimo de la serie lo escribimos como $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Para sumar la serie hay que hallar el límite del término enésimo de la sucesión de sumas parciales

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n-1}}\right) +$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} + \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \text{ que es el valor de } F(x=2)$$

---

3) En el interior de su campo de convergencia una serie de potencias coincide con la serie de Taylor de su función suma.

Sabemos que $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)2^n}$

Sabemos que el desarrollo en serie de Taylor de la función $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(n}(0)}{n!} x^n$

Como ambas series son iguales, los coeficientes de x^n serán el mismo en las dos series:

$$\frac{1}{n(n+1)2^n} = \frac{F^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow F^{(n)}(0) = \frac{n!}{n(n+1)2^n} =$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot \cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)2^n} = \frac{(n-1)!}{(n+1)\cdot 2^n}$$

---

4) La serie derivada tiene el mismo radio de convergencia que la serie dada $R=2$,

Para precisar el campo de convergencia vemos qué ocurre en $x=2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n+1)\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n+1)\cdot 2^{n-1}\cdot 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Como sabemos que la serie armónica es divergente, la serie derivada no converge en $x=2$

Veamos qué ocurre en el otro extremo del intervalo de convergencia $x=-2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{(n+1)\cdot 2^{n-1}\cdot 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$$ esta serie tiene como serie

de los valores absolutos la serie $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ que es divergente, Por lo tanto, en $x=-2$ la serie numérica que se obtiene no es absolutamente convergente.

Puede ser condicionalmente convergente porque es una serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$, Aplicamos el criterio de Leibniz

1) La sucesión $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ es monótona decreciente

$$n+1>n \implies \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n} \quad \text{es decir } a_n<a_{n-1}, \forall n\in N$$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

Luego el criterio de Leibniz dice que la serie es condicionalmente convergente.

El campo de convergencia de la serie derivada es $-2\leq x<2$ o bien $[-2,2)$.

---

8. $\int x\, e^{5x}\,dx$ integramos por partes

$x=u$, $e^{5x}dx=dv$

$dx=du$, $\frac{e^{5x}}{5}=v$

$$\int x\, e^{5x}dx = x\frac{e^{5x}}{5}-\int\frac{e^{5x}}{5}dx=$$

$$=x\frac{e^{5x}}{5}-\frac{e^{5x}}{25}+C$$

$$I = \int \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)}\,dx$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Coef. } x^2: & 3 = A+B \\ \text{Coef } x: & -3 = -2B+C \\ \text{Term ind}: & -1 = A-2C \end{array}\right\} A = -1+2C \qquad \left\{\begin{array}{l} 3 = -1+2C+B \\ -3 = C-2B \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} 4 = B+2C \\ -3 = -2B+C \end{array}\right\} C = -3+2B$$

$$4 = B + 2(-3+2B)$$
$$4 = B - 6 + 4B$$

$$10 = 5B \implies \boxed{B=2}$$

$$C = -3+2\cdot 2 = 1$$
$$\boxed{C=1}$$

$$A = -1+2\cdot 1 = 1$$
$$\boxed{A=1}$$

$$I = \int\left(\frac{1}{x-2} + \frac{2x+1}{x^2+1}\right)dx = \int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \ln|x-2| + \ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + C$$